ＣＭＬによる水面波の描写

創価大学工学部情報システム学科*
石井良夫**、畠山伸正、久保田譲

１．はじめに

自然界に存在する様々な現象は、そのほとんどが非線形現象である。すなわち、現象を支配する方程式を組み立てることが困難な場合や、支配方程式が非線形項を含んでいる場合が多い。そのため、これらを理解する１つの方法として、現象の観察から数理モデルを構築し、その振る舞いを調べることによって実際の現象を理解する方法が試みられている。これによって、複雑に見える現象も比較的単純な数理モデルで（場合によってはいくつかのサブ・システムの集まりによって）表すことができ、本来、非線形現象に代表される複雑な現象の動的振る舞いも、簡単なシステムの組み合わせによってとらえることができるのではないか、と考えられている。

ここでは、流体力学的にも興味ある現象の１つである水面波の伝播現象を数理モデル（結合差分格子法（ Coupled Map Lattice ））によって表すことを試みる。

２．水面波伝播現象の数理モデルについて

複雑現象の数理モデル化は、対象となる現象を観察し、マクロなレベルで起こっている当然の現象や振る舞いを、得られた直感的、経験的ルール（たとえば、浸食を表す数理モデルには、雨を一様に降らし、水は低い方へ流れ、地面は水流に応じて浸食し、、、）に従って構築される。具体的には、現象の観察からそれらを支配するいくつかのルールを考え、それらを組み合わせることによって支配方程式に変わるような数理モデルを考案する。

以下に、本研究で用いた数理モデルについて説明する。

a）手順１～水面上の高低差分布の計測～

平面格子上で、隣接する４つの点を用いて高さの平均を求め、その中心にある点の高さ平均からのずれｄｈを以下に示す式より求める。（カップリング項）

この手順は、各点（格子点）からの高低差を求めている。

$$dh^t_{i,j} = \frac{1}{4}(h^t_{i,j-1} + h^t_{i,j+1} + h^t_{i-1,j} + h^t_{i+1,j}) - h^t_{i,j} \qquad (1)$$

b）手順２～各点上の復元力による速度測定～

各格子点上における（波の伝播する）速度を、平均高さからのずれｄｈを用いて求める。これは、水平面上には復元力（面上に高低差が存在したときに、均一面上にしようと働く力、垂直重力な

＊　〒192　東京都八王子市丹木町1-236、
＊＊　E-mail : hyosii@t.soka.ac.jp

ど）が作用するため、面上で高さｈの平均値からのずれｄｈがあると、高低差がなくなるように速度が生じる作用効果を含む必要があることに起因する。

これより以下のような式が考えられる。（局所ダイナミックス）

$$v_{i,j}^{t+1} = v_{i,j}^{t} + b \tanh(a\, dh_{i,j}^{t}) \qquad (2)$$

ここで、ａ，ｂは任意定数であり、ｖは速度を表す。

c）手順３～各点上の新たな高低差分布～

手順２の後、次の時間ステップへと状態を進めるため、以下の式を用いる。ここで、一定時間内の速度を考えているために、高さと速度が同じ次元で計算できる。これによって、速度による位置（波面）の変化を計算することができる。

$$h_{i,j}^{t+1} = h_{i,j}^{t} + v_{i,j}^{t+1} \qquad (3)$$

以上述べた手順１から手順３を順次行うことによって、水面波伝播現象のシミュレーションを行う。ここで波の伝播現象が起こる水面上の流れ場は、等間隔格子で２次元平面上を区切ったものであり、条件として、密度一定、非圧縮、また圧力は水位に相当するものとする。

３．シミュレーション結果

初期条件として、水面上に高低差が１点存在する場合（単一波の伝播）と水面上に高低差がある距離をおいて２点存在する場合（単一波の伝播の重ね合わせ）について、先に述べた数理モデルを用いてシミュレーションを行った。以下、それぞれの結果について述べる。

ａ）単一波の場合

図１から図３に単一波時間変化のシミュレーション結果を示す。ここでは、流れ場上の任意点（流れ場平面上の中心点）に、突起部（水面との高低差）を初期条件として挿入する。ここで、（２）式中にある定数（tanh における定数 a）を変化させた。この値の変化は、原点からの傾きに依存しており、大きくなるにつれて傾きが大きくなる。これは、復元力の大きさ（強さ）に関係しており、値が大きくなるにつれて流れ場中の復元力が強く作用することになる。図１（定数0.5）では、伝播が安定しておらず、また図３では、時間経過とともに伝播よりも乱れが助長していることがわかる。図２（定数2）の場合が、水面上に起こる単一波の伝搬現象に類似した現象をよく記述しているものと思われる。

ｂ）単一波の重ね合わせ

同一水面上に２点の単一波が存在する場合について、図４にシミュレーション結果を示す。ここでは、水面上の任意の２点に突起部（水面との高低差）を初期条件として挿入する。ここで、時間経過とともにそれぞれの高低差が変化し、単一波の場合と同じように波面がそれぞれの進行方向に進む。また、それらが出会うと、波の重ね合わせに似た現象が起こっている。これは、実際に水面上に起こる単一波の重ね合わせに類似した現象の振る舞いを記述しているものと思われる。

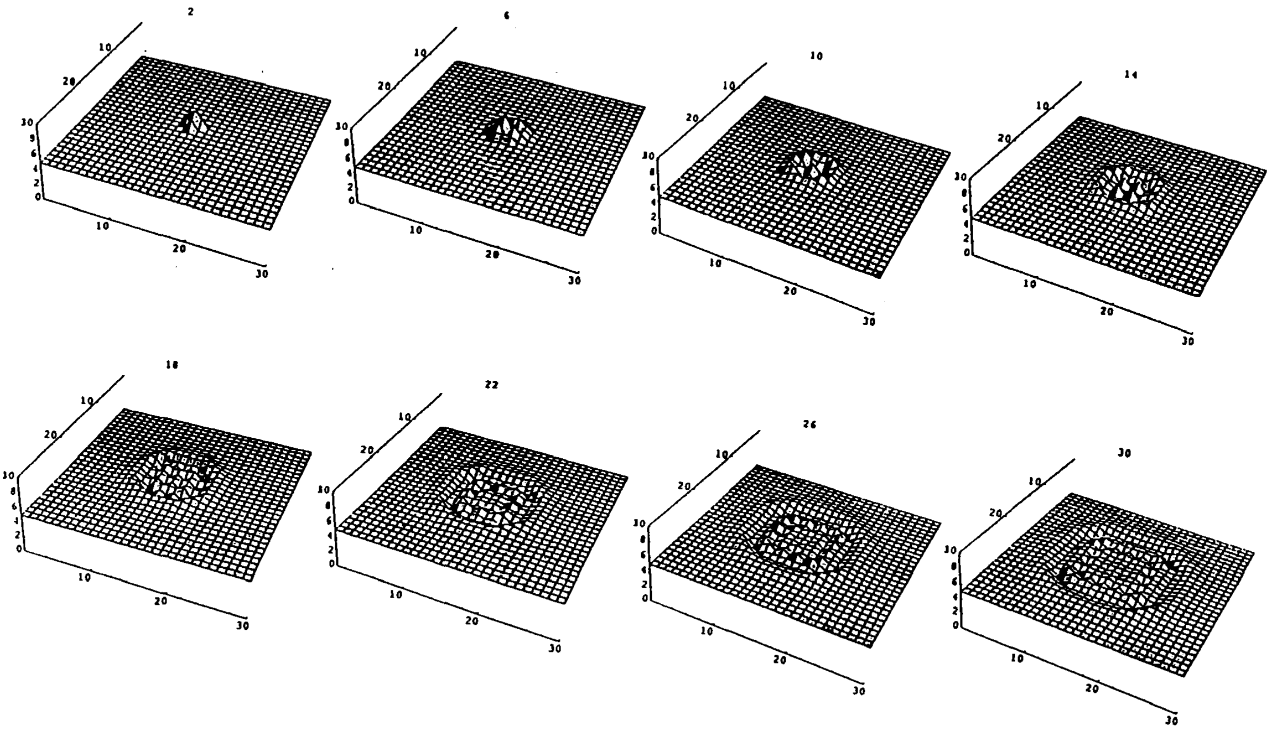

図1 (a). 単一波伝播のシミュレーション (tanh 0.5x)

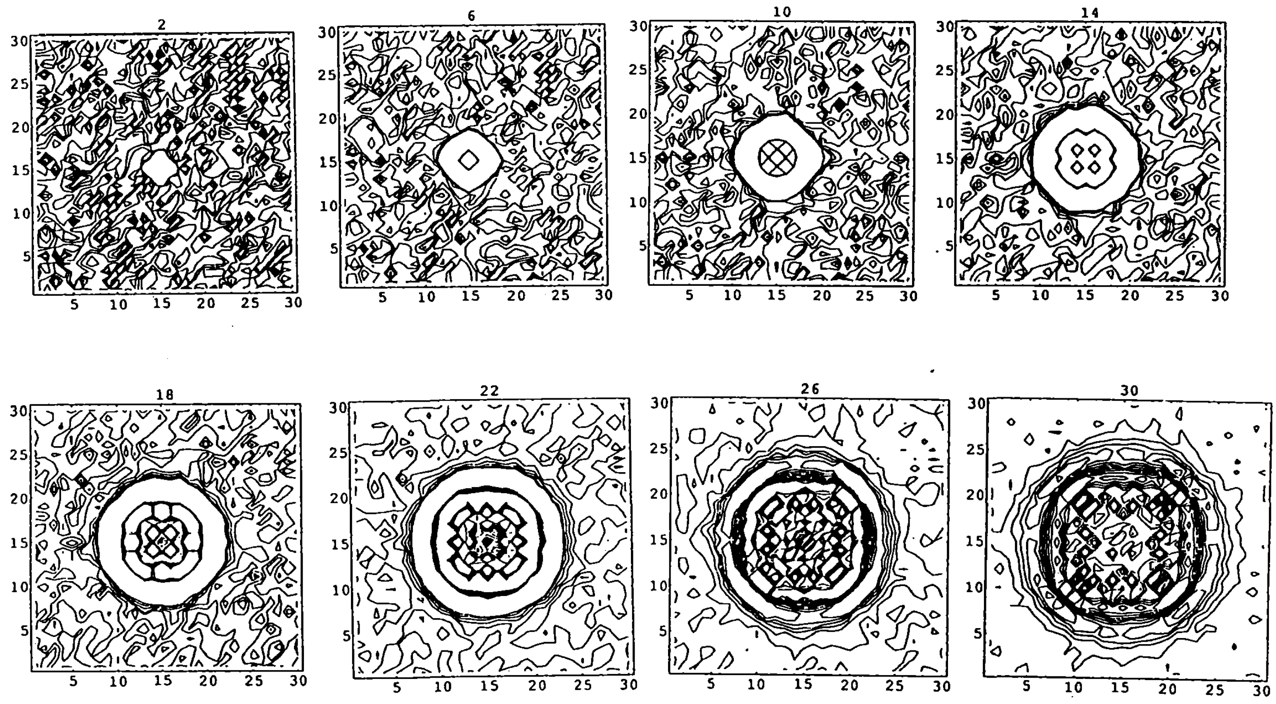

図1 (b). 単一波伝播のシミュレーション (tanh 0.5x) ～等高線～

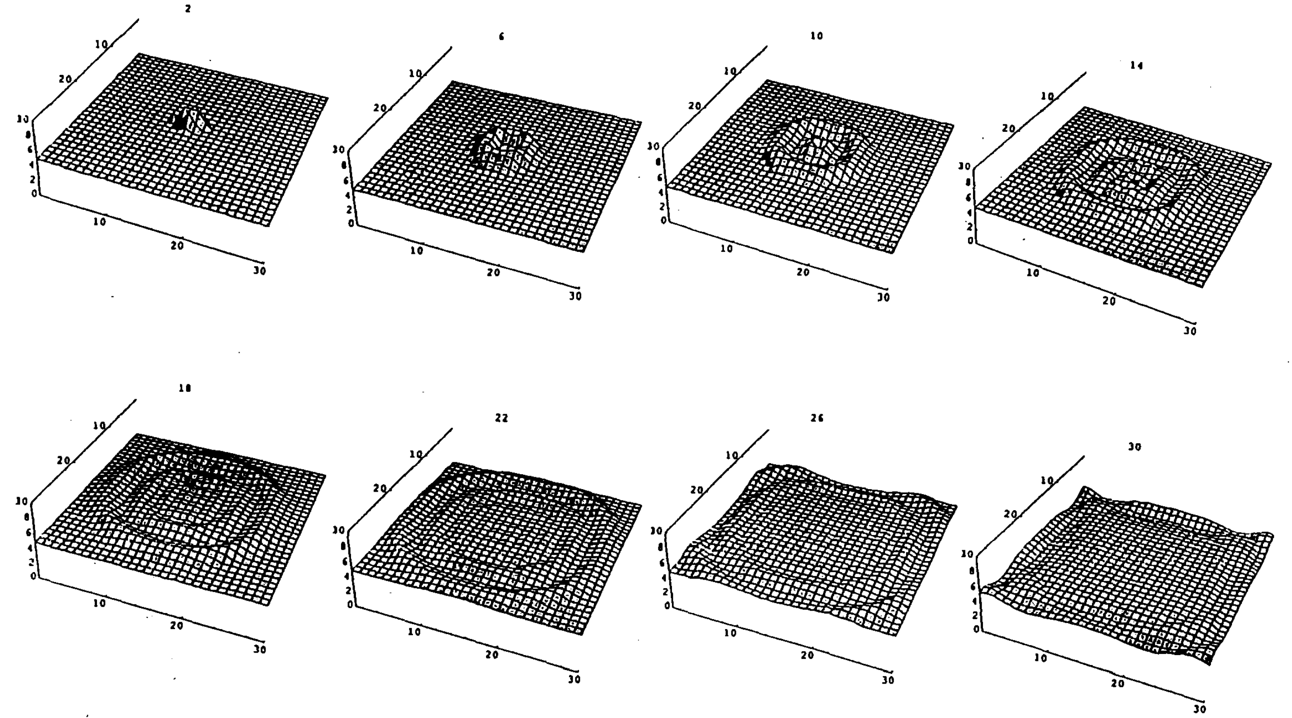

図２（a）．単一波伝播のシミュレーション（tanh 2x）

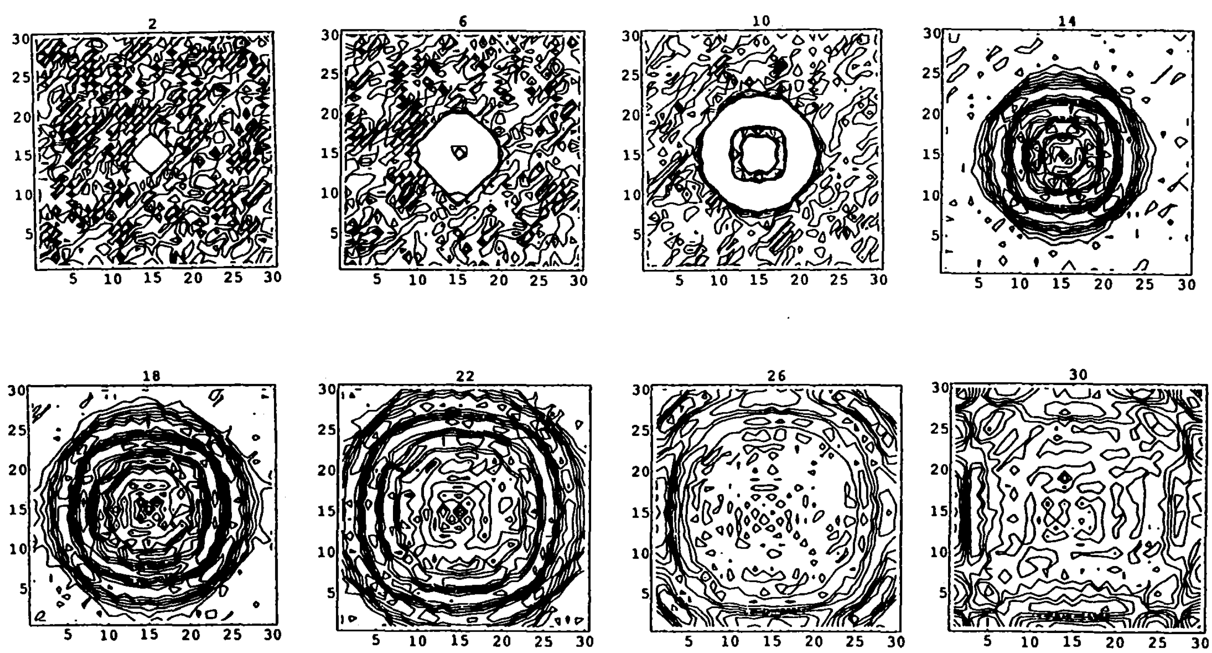

図２（b）．単一波伝播のシミュレーション（tanh 2x）～等高線～

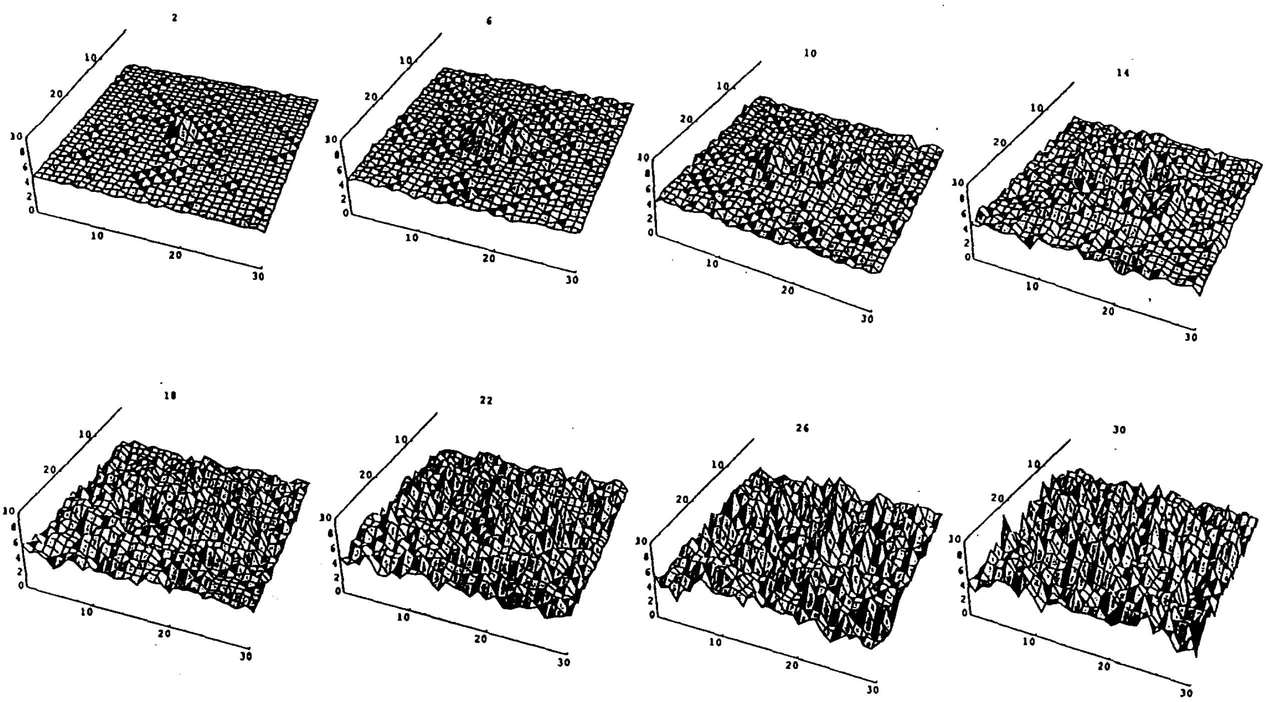

図3（a）．単一波伝播のシミュレーション（tanh 3x）

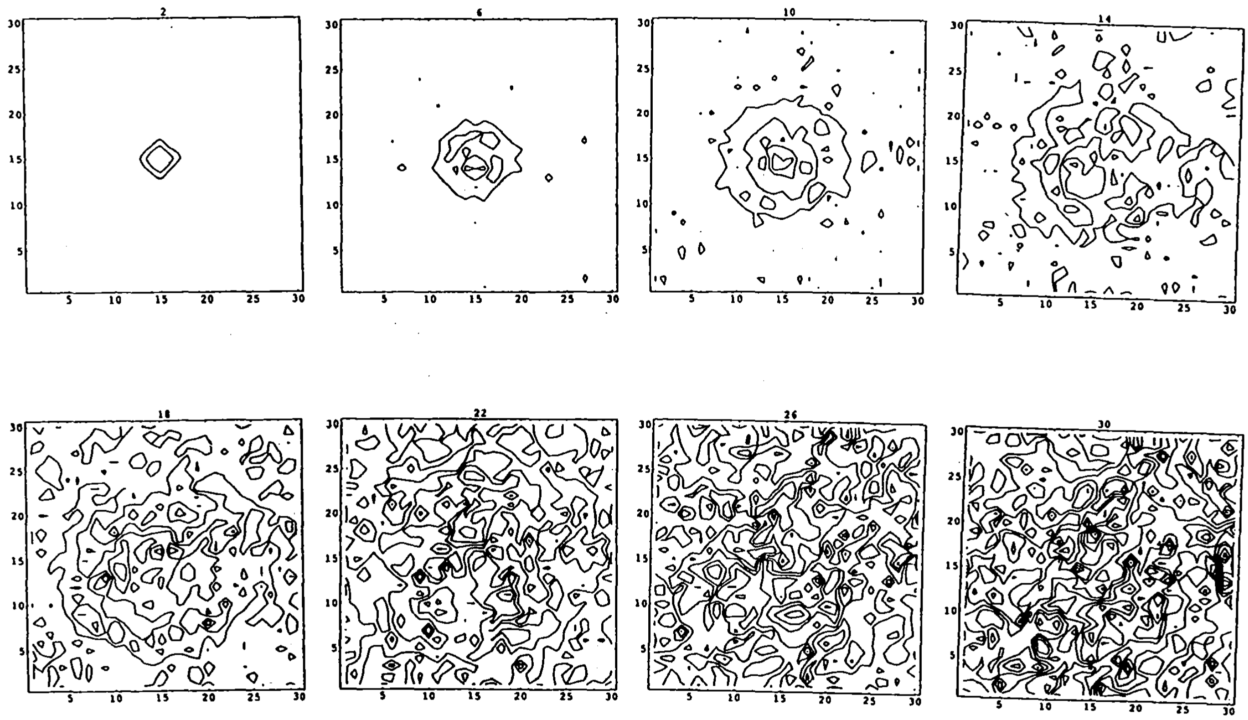

図3（b）．単一波伝播のシミュレーション（tanh 3x）～等高線～

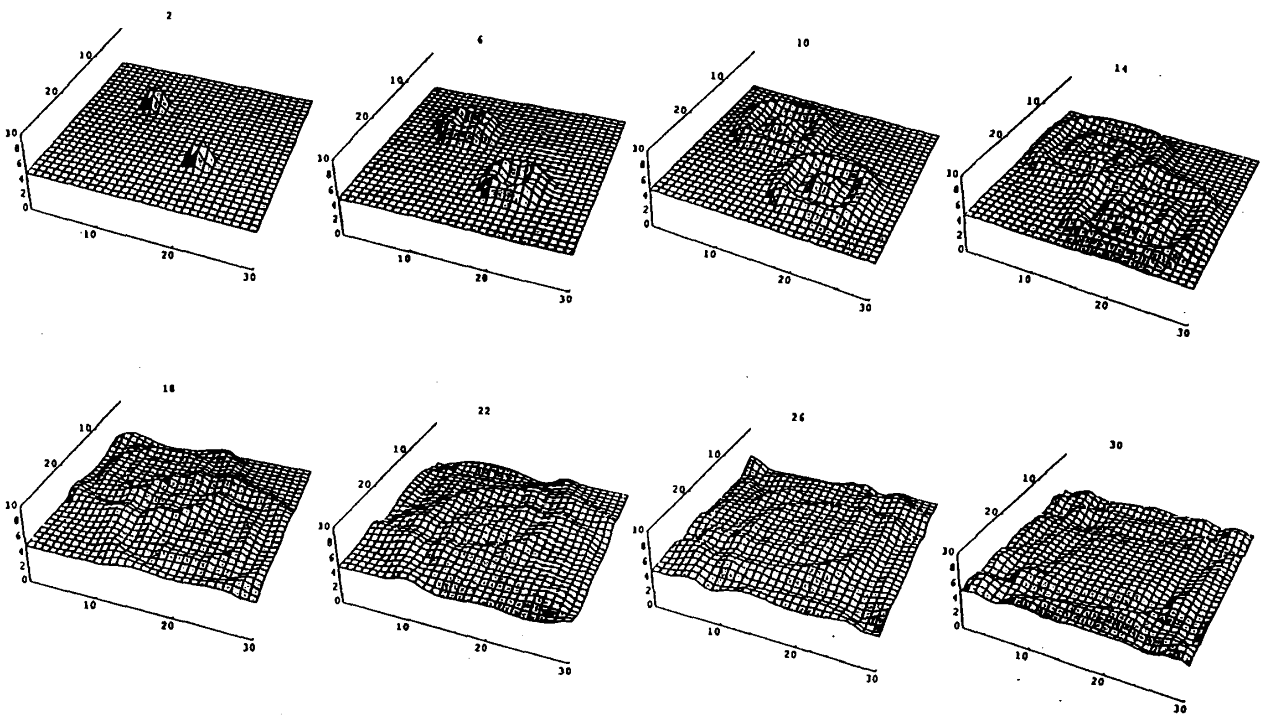

図4（a）．単一波の重ね合わせ

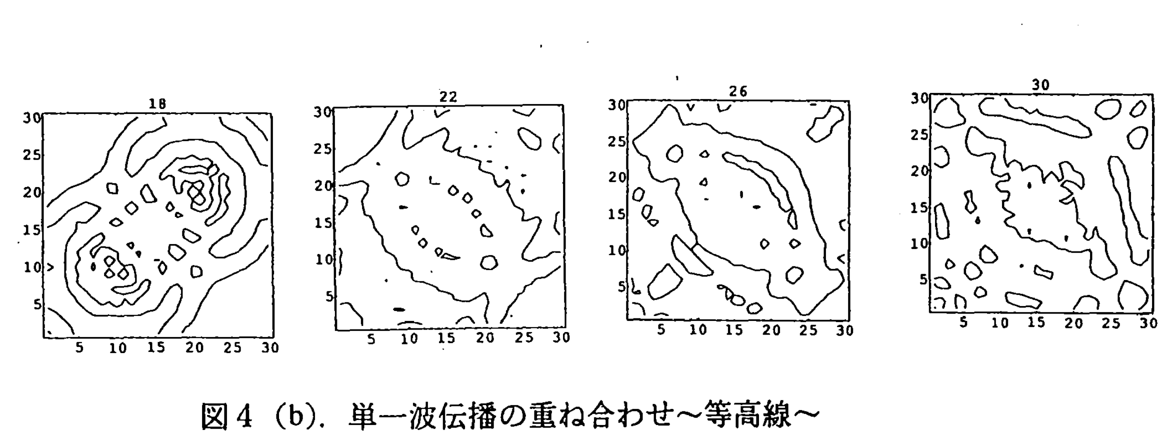

図4（b）．単一波伝播の重ね合わせ～等高線～

4．さいごに

水面波の伝播現象は、実際に非線形の微分方程式によって記述されており、その支配方程式を正確に解くことはできない。本研究では、伝播現象の支配方程式やそれらの近似解によらず、現象から数理モデルを構築しシミュレーションを行い、実際の現象に近い定性的な振る舞いを記述することができた。

数理モデルにおける（2）式において、速度を求める関数に tanh を用いた。これは、重力や表面張力のような復元力による効果が存在するときに有用な関数であるが、この関数を他の関数に置き換えることによって、生じさせる復元力の効果を変えたり、または、他の様々な効果を加えたりすることができる。その他、局所平均化における他の方法も考えられており、特に隣接した近傍点より次の時間における値を決める数理モデル（カップリング項）について、その構造特性によっては微妙に記述する現象が異なる場合もある。

結合差分格子法は、格子上の各点に状態量が存在し、任意の点における次の時間の状態を、その点の近傍の状態によって決定されるため、水面波伝播のような現象を記述できる数理モデルとして有用なものと考えられ、また様々な拡張性を有しているものと思われる。すなわち、様々な条件によって起こる未知の現象をシミュレーションによって実験することが可能ではないかと考えられる。